Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

ASPETTI GLOBALI DELLE VARIETÁ DIFFERENZIABILI

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Fioresi Rita

Presentata da:
Vignoli Massimiliano

Sessione II
Anno Accademico 2009/10

Introduzione

In questa tesi illustriamo una delle idee che sono risultate vincenti nella geometria moderna, ovvero quella di caratterizzare gli spazi non con insiemi di punti, ma con algebre di funzioni. L'idea che vi sta alla base è: dato un sistema fisico, o un oggetto, per sapere come è fatto possiamo considerarlo come insieme di punti e provare a disegnarlo, ma in realtà lo possiamo determinare anche conoscendo (misurando) tutte le caratteristiche dei suoi stati fisici.

Il capitolo 1 è costituito dalle definizioni di base che riguardano gli spazi di Banach e la nozione di differenziabilità. Nell'ultima sezione diamo la definizione di varietà differenziabile modellata su spazi di Banach che risulta molto generale poiché possono essere modellate su questi spazi sia varietà finito dimensionale che infinito dimensionale.

Nel capitolo 2 resta centrale la nozione di varietà differenziabile, ma introducendo i concetti di fascio, prefascio, spiga e spazio étalé, possiamo dare una definizione alternativa, ma equivalente, di varietà differenziabile. Con questa nuova definizione di varietà come spazio localmente anellato iniziamo ad osservare le varietà non più come insiemi di punti, ma come un algebra di funzioni.

Nel capitolo 3 ci preoccupiamo di dimostrare come poter ricostruire una varietà a partire dall'algebra delle sezioni globali, ovvero riconoscere che rapporto vi sia tra i punti dello spazio topologico sottostante la varietà e la suddetta algebra e come si possa ricostruire il fascio strutturale della varietà. Nel percorso sarà fondamentale la partizione dell'unità, e si otterà un risultato analogo al Nullstellensatz, sui reali cioè senza richiedere la chiusura algebrica di un campo.

Nel capitolo 4 si illustra la potenza dell'idea di studiare gli spazi non come insiemi di punti ma come algebre di funzioni. Si introducono le C^*-algebre, e si illustrano alcune delle nozioni basilari riguardanti gli spazi di Hilbert. Si illustrano poi i teoremi di Gelfand-Naimark e si apprezza da una parte la forte astrazione e generalità che permette di stabilire un equivalenza tra categorie apparentemente molto distanti, dall'altra la spiccata concretezza dovuta alla possibilità di interpretare, e modellare matematicamente, oggetti concreti della fisica quantistica come gli osservabili.

Indice

Capitolo 1

Spazi di Banach e varietà differenziabili

In questo capitolo esporremo alcuni preliminari sugli spazi di Banach e daremo la definizione di varietà modellata su spazi di Banach.

1.1 Spazi di Banach

In questa sezione illustreremo le nozioni fondamentali della teoria degli spazi di Banach, maggiori e più approfonditi dettagli si possono trovare in [1] all'interno dei capitoli 2 e 3.

Innanzitutto definiamo cosa si intende per una *norma* e quali siano le principali proprietà.

Definizione 1.1. Una *norma* su uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) $\mathbf{E}$, non necessariamente finito dimensionale, è una mappa da $\mathbf{E}$ nei numeri reali (risp. complessi), $\|\cdot\| : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C}), e \longmapsto \|e\|$, tale che

N1. $\|e\| \geq 0$ per ogni $e \in \mathbf{E}$ inoltre $\|e\| = 0 \Longrightarrow e = 0$;

N2. $\|\lambda e\| = |\lambda| \|e\|$ per ogni $e \in \mathbf{E}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

N3. $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$ per ogni $e_1, e_2 \in \mathbf{E}$.

Osserviamo che (**N2**) implica che la lunghezza del vettore nullo sia nulla $\|0\| = 0$.

Ora che abbiamo definito cosa sia una norma, possiamo definire cosa sia uno *spazio normato*.

Definizione 1.2. Sia $\mathbf{E}$ uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) e $\|\cdot\|$ una norma reale (risp. complessa), allora la coppia $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ è detta uno *spazio normato*.

Esempio 1.3. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la *norma standard, o Euclidea*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

dove $x = (x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, è uno spazio normato.

Esempio 1.4. Sia

$$C(D, \mathbb{R}) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ compatto e } f \text{ continua}\}$$

con la norma del massimo

$$\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)|$$

con $|\cdot|$ valore assoluto in $\mathbb{R}$, è uno spazio normato.

Notiamo che se D non è compatto, $\|\cdot\|$ non è ben definita. É tuttavia ben definita una famiglia di norme[1] per $K \subset D$ compatto con

$$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f_{|K}(x)|$$

dove $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Ora mostriamo che in uno spazio normato la norma induce in modo naturale una *metrica*, quindi uno spazio normato è anche *uno spazio metrico*.

Proposizione 1.5. *Sia* $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato e definiamo* $d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\|$. *Allora* $(\mathbf{E}, d)$ *è uno spazio metrico.*

[1] In realtà non sono propriamente norme, si dicono seminorme infatti se $\|f\|_K = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Dimostrazione. L'unica verifica, non ovvia, è che valga la disuguaglianza triangolare per la metrica. Quindi per (**N3**)

$$d(e_1, e_3) = \|e_1 - e_3\| = \|(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3)\| \leq$$
$$\leq \|(e_1 - e_2)\| + \|(e_2 - e_3)\| = d(e_1, e_2) + d(e_2, e_3).$$

□

Prima di definire gli *spazi di Banach*, ricordiamo, con una caratterizzazione, la definizione di completezza.

Definizione 1.6. Sia $(\mathbf{E}, d)$ uno spazio metrico. $\mathbf{E}$ è completo rispetto alla metrica d se per ogni successione limitata esiste una sottosuccessione convergente in $\mathbf{E}$.

Definizione 1.7. Sia $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Se $\mathbf{E}$ è completo rispetto alla metrica d indotta dalla norma, allora diciamo che $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ è uno *spazio di Banach*.

La definizione di spazio di Banach dipende fortemente dalla norma, è quindi importante stabilire in che senso due norme siano *equivalenti*.

Definizione 1.8. Due norme di uno stesso spazio vettoriale $\mathbf{E}$ sono *equivalenti* se inducono la stessa topologia su $\mathbf{E}$.

Ora è necessario caratterizzare la definizione di equivalenza per poter distinguere i casi.

Proposizione 1.9. *Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbf{E}$ sono equivalenti se e solo se esiste una costante M tale che, per ogni $e \in \mathbf{E}$,*

$$\frac{1}{M}\|e\|_2 \leq \|e\|_1 \leq M\|e\|_2.$$

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 40. □

Teorema 1.10. *Sia $\mathbf{E}$ uno spazio vettoriale reale o complesso finito dimensionale. Allora sono equivalenti:*

(i) *c'è una norma su* $\mathbf{E}$*;*

(ii) *tutte le norme su* $\mathbf{E}$ *sono equivalenti;*

(iii) *tutte le norme su* $\mathbf{E}$ *sono complete*

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 41. □

Osserviamo solamente che per dimostrare il teorema 1.10 è cruciale il fatto che in uno spazio vettoriale finito dimensionale la sfera unitaria sia compatta.

Mappe lineari e multilineari Studiamo ora le relazioni tra le definizioni classiche di continuità, limitatezza e linearità, negli spazi di Banach.

Proposizione 1.11. *Sia* $A : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *una mappa lineare tra spazi normati. Allora* A *è continua se e solo se esiste una costante* $M > 0$ *tale che*

$$\|Ae\|_{\mathbf{F}} \leq M\|e\|_{\mathbf{E}} \qquad \forall e \in \mathbf{E}.$$

Dimostrazione. La continuità di A in e_0 significa che per ogni $r > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$A\left(e_0 + \overline{B_\rho(0_{\mathbf{E}})}\right) \subset Ae_0 + \overline{B_r(0_{\mathbf{F}})}$$

dove con $0_{\mathbf{E}}$ si intende lo zero in $\mathbf{E}$ mentre $\overline{B_s(0_{\mathbf{E}})}$ indica il disco chiuso di raggio s centrato nell'origine di $\mathbf{E}$. A è lineare, ciò equivale a dire che se $\|e\|_{\mathbf{E}} \leq \rho$, allora $\|Ae\|_{\mathbf{F}} \leq r$. Se $M = r/\rho$, la continuità di A è allora equivalente alle seguenti condizioni: $\|e\|_{\mathbf{E}} \leq 1$ implica $\|Ae\|_{\mathbf{F}} \leq M$, ovvero se e solo se $M > 0$ tale che $\|Ae\|_{\mathbf{F}} \leq M\|e\|_{\mathbf{E}}$, condizione che si ricava dalla precedente $e = e/\|e\|_{\mathbf{E}}$. □

Quindi per una mappa lineare la definizione di continuità equivale alla definizione di limitatezza. Se lo spazio vettoriale considerato è finito dimensionale allora abbiamo che la semplice linearità implica sia la continuità che la limitatezza.

Proposizione 1.12. *Se* $\mathbf{E}$ *è finito dimensionale e* $A : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *è lineare, allora* A *è continua.*

La limitatezza delle mappe continue e lineari suggerisce la possibilità di definire una norma per queste mappe.

Definizione 1.13. Se $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ sono spazi normati e $A : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ è una mappa lineare e continua, definiamo l'operatore *norma* di A come

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ae\|}{\|e\|} \middle| e \in \mathbf{E}, e \neq 0 \right\}$$

che è finita per la proposizione 1.11. Sia $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ lo spazio di tutte le mappe continue e lineari di $\mathbf{E}$ in $\mathbf{F}$. Se $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) allora $L(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ (risp. $L(\mathbf{E}, \mathbb{C})$) si indica con $\mathbf{E}^*$ e si chiama lo *spazio duale reale* (risp. complesso) di $\mathbf{E}$.

Proposizione 1.14. $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *con la norma definita in 1.13 è uno spazio normato.* $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *è uno spazio di Banach se* $\mathbf{F}$ *lo è.*

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 51. □

Ora estendiamo al caso di prodotti di spazi vettoriali le definizioni appena viste.

Definizione 1.15. Siano $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$ e $\mathbf{F}$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, una mappa

$$A : \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k \longrightarrow \mathbf{F}$$

è detta *k-multilineare* se $A(e_1, \ldots, e_k)$ è lineare in ogni argomento separatamente. Lineare nel primo argomento significa che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$A(\lambda e_1 + \mu f_1, e_2, \ldots, e_k) = \lambda A(e_1, e_2, \ldots, e_k) + \mu A(f_1, e_2, \ldots, e_k)$$

e vale lo stesso per ogni altro argomento.

Definizione 1.16. Lo spazio di tutte le mappe k-multilineari continue da $\mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k$ a $\mathbf{F}$ si indica $L(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F})$. Se per ogni i si ha $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}$, lo spazio si denota $L^k(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Come visto in 1.11 una mappa k-multilineare A è continua se e solo e esiste $M > 0$ tale che

$$\|A(e_1, \dots, e_k)\| \leq M\|e_1\| \dots \|e_k\|$$

per ogni $e_i \in \mathbf{E}_i$, $1 \leq i \leq k$. Definiamo inoltre

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|A(e, \dots, e_k)\|}{\|e_1\| \dots \|e_k\|} \,\middle|\, e_1, \dots, e_k \neq 0 \right\}$$

che rende $L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F})$ uno spazio normato che è completo se $\mathbf{F}$ lo è.

1.2 Differenziabilità negli spazi di Banach

Per una funzione derivabile $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'interpretazione usuale identifica la derivata in un punto $u_0 \in U$ con la pendenza della retta tangente al grafico di f in u_0. Per generalizzare ciò, interpretiamo $\mathbf{D}f(u_0) = f'(u_0)$ come la mappa lineare che agisce sul vettore $(u - u_0)$.

Definizione 1.17. Siano **E, F** spazi vettoriali normati, sia U un insieme aperto di $\mathbf{E}$ e $f : U \longrightarrow F$ una mappa data. Sia $u_0 \in U$. Si dice che f è *differenziabile* nel punto u_0 se esiste una mappa lineare limitata $\mathbf{D}f(u_0) : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ tal che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $0 < \|u - u_0\| < \delta$, allora

$$\frac{\|f(u) - f(u_0) - \mathbf{D}f(u_0) \cdot (u - u_0)\|}{\|u - u_0\|} < \varepsilon$$

dove $\|\cdot\|$ rappresenta la norma nello spazio appropriato e la valutazione di $\mathbf{D}f(u_0)$ in $e \in \mathbf{E}$ è denotata $\mathbf{D}f(u_0) \cdot e$.

Questa definizione può essere scritta equivalentemente come

$$\lim_{u \longrightarrow u_0} \frac{\|f(u) - f(u_0) - \mathbf{D}f(u_0) \cdot (u - u_0)\|}{\|u - u_0\|} = 0.$$

Un modo alternativo per pensare alla derivata rispetto al grafico della variabile è dire che $\mathbf{D}f(u_0)$ è l'unica mappa lineare da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che la mappa $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$u \longrightarrow g(u) = f(u_0) + \mathbf{D}f(u_o) \cdot (u - u_0)$$

sia tangente a f in u_0.

Per maggiori dettagli si veda [1] pag. 67.

Definizione 1.18. Siano **E, F** spazi vettoriali normati, con mappe $f, g : U \subset \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ con U aperto in $\mathbf{E}$. Diciamo che f e g sono *tangenti* nel punto $u_0 \in U$ se $f(u_0) = g(u_0)$ e

$$\lim_{u \longrightarrow u_0} \frac{\|f(u) - g(u)\|}{\|u - u_0\|} = 0.$$

Proposizione 1.19. *Per $f : U \subset \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ e $u_0 \in U$ c'è al massimo una $L \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ tale che la mappa $g_L : U \longrightarrow \mathbf{F}$ data da $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ sia tangente a f in u_0.*

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 67. □

In virtù di questa proposizione possiamo riformulare la nozione di derivabilità. Se esiste una L come nella proposizione, allora f è differenziabile in u_0 e la derivata di f in u_0 è $\mathbf{D}f(u_0) = L$. Quindi la derivata, se esiste, è unica.

Definizione 1.20. Se f è differenziabile in ogni $u_0 \in U$, la mappa

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{D}f : & U & \longrightarrow & L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \\ & u & \longmapsto & \mathbf{D}f(u) \end{array}$$

è detta la *derivata* di f. Inoltre, se $\mathbf{D}f$ è una mappa continua (dove $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ha la topologia indotta dalla norma), si dice che f è di *classe* C^1. Procedendo induttivamente definiamo

$$\mathbf{D}^r f := \mathbf{D}(\mathbf{D}^{r-1} f) : U \longrightarrow L^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

se esiste, dove abbiamo identificato $L(\mathbf{E}, L^{r-1}(\mathbf{E}, \mathbf{F}))$ con $L^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Se $\mathbf{D}^r f$ esiste ed è continua rispetto alla norma diciamo che f è di *classe* C^r.

In questo lavoro tratteremo solo funzioni di classe $C^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n$ che chiamereno anche *differenziabili*.

Definizione 1.21. Siano U e V sottoinsiemi aperti rispettivamente di **E** e **F**. Una mappa $f : U \longrightarrow V$ è un *diffeomorfismo di classe* C^∞ se f è differenziabile, è biunivoca e f^{-1} è differenziabile.

1.3 Varietà differenziabili

L'obiettivo principale della definizione di varietà differenziabile è quello di introdurre un oggetto locale su cui si possa definire la derivata e di dare una regola che ci permetta di incollare tutti questi oggetti locali in maniera *liscia*. Definiremo la nozione di varietà modellata su uno spazio di Banach, non chiediamo quindi che la varietà sia finito dimensionale.

Definizione 1.22. Sia S un insieme. Una *carta* su S è una biiezione φ da un sottoinsieme U di S in un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach. Solitamente la carta φ è indicata (U, φ), per indicarne il dominio. Un *atlante* differenziabile su S è una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in I\}$ tale che:

MA1 $\{U_i\}$ è un ricoprimento di S;

MA2 Due carte qualsiasi in $\mathcal{A}$ sono *compatibili* ovvero: date (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la mappa

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

è un diffeomorfismo differenziabile e l'immagine $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ è aperta per ogni coppia di indici i, j. Tale mappa si dice anche *cambio di carte* o *mappa di transizione*.

Ora definiamo cosa sia una *varietà*.

Definizione 1.23. Due atlanti differenziabili $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ sono *equivalenti* se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è un atlante differenziabile. Una *struttura differenziabile* $\mathcal{D}$ su S è una classe di equivalenza di atlanti su S. L'unione degli atlanti in $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \bigcup \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{D}\}$$

è l'*atlante massimale* di $\mathcal{D}$, e una carta (U, φ) è una *carta locale ammissibile*. Se $\mathcal{A}$ è un atlante differenziabile su S, l'unione di tutti gli atlanti equivalenti a $\mathcal{A}$ è detta la struttura differenziabile *generata da* $\mathcal{A}$.

Una *varietà differenziabile* M è una coppia $(S, \mathcal{D})$, dove S è un insieme e $\mathcal{D}$ è una struttura differenziabile su S. Se un ricoprimento di carte prende valori in un spazio di Banach $\mathbf{E}$, allora $\mathbf{E}$ è detto lo spazio modello e diremo che M è una *varietà differenziabile modellata su uno spazio di Banach* $\boldsymbol{E}$.[2]

Ai fini pratici è sufficiente specificare un atlante particolare su S per determinare una struttura di varietà su S.

Ora definiamo gli insieme aperti in una varietà.

Definizione 1.24. Sia M una varietà differenziabile. Un sottoinsieme $A \subset M$ è un aperto se per ogni $a \in A$ esiste una carta locale ammissibile (U, φ) tale che $a \in U$ e $U \subset A$.

Proposizione 1.25. *Gli insiemi aperti in M definiscono una topologia.*

Dimostrazione. É sufficiente prendere come base della topologia la famiglia delle intersezioni finite delle carte del dominio. □

Definizione 1.26. Una varietà differenziabile M è una *n-varietà* se ogni carta ha valori in uno spazio vettoriale n-dimensionale. Così per ogni punto $a \in M$ esiste una carta locale ammissibile (U, φ) con $a \in U$ e $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e scriveremo $n = \dim M$. Per noi una n-varietà è uno spazio di Hausdorff con una struttura di n-varietà differenziabile. Una varietà differenziabile è detta una *varietà finito-dimensionale* se le sue componenti connesse sono tutte n-varietà (n può variare tra le componenti).

Osserviamo che nella definizione di varietà non si fa alcuna assunzione sulla connessione, ma poiché una varietà è localmente connessa per archi, le sue componenti sono aperte e chiuse.

Definizione 1.27. Una mappa $f : M \longrightarrow N$ tra due varietà si dice *differenziabile* se per ogni $x \in M$ e ogni carta (V, φ_V) in N tale che $f(x) \in V$ c'è una carta (U, φ_U) su M tale che $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ e $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ è differenziabile. Lo spazio di tutte le funzioni differenziabili tra M e N lo indicheremo con $C^\infty(M, N)$.

[2]Per differenziabile si intende di classe C^∞.

Proposizione 1.28. *Se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ sono mappe differenziabili tra varietà, allora anche $g \circ f$ è differenziabile.*

Definizione 1.29. Una mappa $f : M \longrightarrow N$, con M e N varietà, è detta un *diffeomorfismo* se f è differenziabile, è biunivoca e $f^{-1} : N \longrightarrow M$ è differenziabile. Se esiste un diffeomorfismo tra due varietà, esse vengono dette *diffeomorfe*.

Mostriamo ora alcuni esempi di varietà.

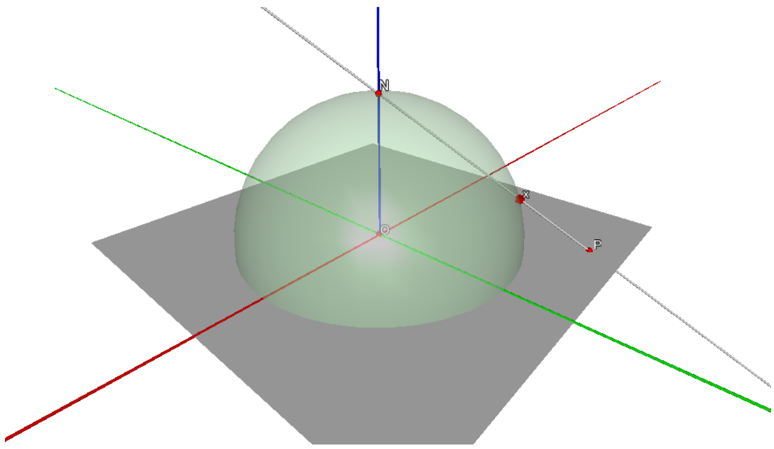

Figura 1.1: Proiezione stereografica.

Esempio 1.30. Sia

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \right\}$$

una sfera.

Allora sui due aperti $U_N = S^n \setminus N$ e $U_S = S^n \setminus S$ dove $N = (0, \ldots, 0, 1)$ è il polo nord e $S = (0, \ldots, 0, -1)$ è il polo sud possiamo definire le proiezioni stereografiche:

$$\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Le cui inverse sono:

$$\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_N : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2 + 1} \left(2x_1, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1\right)$$

$$\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_S : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2 + 1} \left(2x_1, \dots, 2x_n, 1 - \|x\|^2\right).$$

Quindi le carte individuate sono diffeomorfismi di S^n su $\mathbb{R}^n$. Inoltre le carte sono diffeomorfismi e sull'intersezione abbiamo che il cambio di carte

$$\varphi_S^{-1}\varphi_N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

è anch'esso differenziabile. Quindi abbiamo dimostrato che S^n è una n-varietà differenziabile.

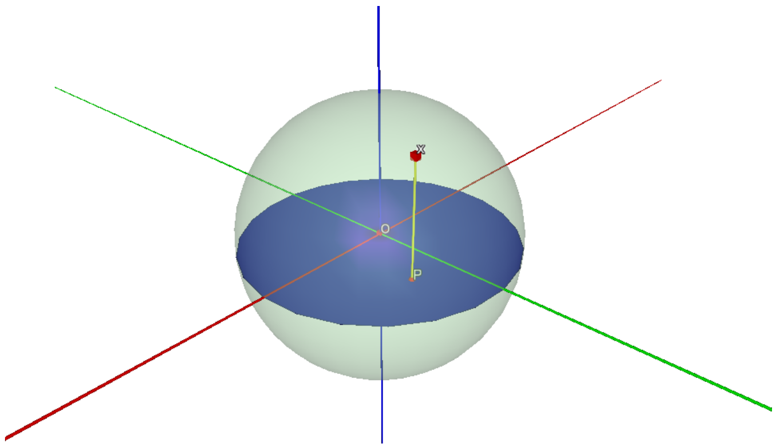

Figura 1.2: Proiezione sui piani coordinati.

Esempio 1.31. Consideriamo sempre la sfera S^n come definita in precedenza. Mostriamo ora che possiamo definire un atlante diverso rispetto a quello appena definito con le proiezioni stereografiche. L'atlante consiste nella proiezione delle $2n$ calotte sferiche aperte, $S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_i > 0\}$ o $S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_i < 0\}$ per ogni i, sugli n iperpiani coordinati.

Per semplicità di notazione svolgiamo l'esempio per S^2. Definiamo quindi $U_{x,+} = S^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\}$ e analogamente $U_{x,-} = S^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x < 0\}$ e la proiezione $\varphi_{x,\pm} : U_{x,\pm} \longrightarrow \mathring{D}^2{}_{y,z} : (x, y, z) \longmapsto (y, z)$ e analogamente per y

e z. L'inversa di ogni proiezione è quindi $\varphi_{x,\pm}^{-1} : \overset{\circ}{D}{}^2{}_{y,z} \longrightarrow U_{x,\pm} : (y,z) \longmapsto (\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$.

Ogni proiezione è un diffeomorfismo. Ora osserviamo come si comporta il cambio di carte:

$$\varphi_{x,+}^{-1}\varphi_{z,+} : \overset{\circ}{D}{}^2{}_{y,z} \cap \{z > 0\} \longrightarrow \overset{\circ}{D}{}^2{}_{x,y} \cap \{x > 0\} : (y,z) \longmapsto (\sqrt{1-y^2-z^2}, y).$$

Il cambiamento di carte è differenziabile, sugli aperti su cui è definito. Quindi abbiamo definito per mezzo di un altro atlante una struttura di 2-varietà differenziabile su S^2.

É immediato verificare che si tratta di atlanti equivalenti.

Capitolo 2

Fasci

In questo capitolo definiremo i concetti di limite diretto, prefascio, fascio, spiga, spazio étalé, spazi anellati e spazi localmente anellati. Infine daremo un definizione alternativa di varietà differenziabile come spazio localmente anellato e mostreremo che quest'ultima definizione è equivalente alla definizione di varietà differenziabile data inizialmente.

2.1 Limiti diretti

Definiamo il concetto di limite diretto, così come viene definito in [11] pag. 269 e seguenti.

Definizione 2.1. Un *insieme diretto* è un insieme parzialmente ordinato Λ tale che per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$ esiste $\nu \in \Lambda$ tale che $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.

Per esempio un insieme totalmente ordinato è un insieme diretto, mentre l'insieme dei sottoinsiemi finiti di un insieme S, ordinato con l'inclusione, è un insieme diretto non totalmente ordinato.

Supponiamo che per ogni elemento λ di un insieme diretto Λ sia dato un insieme M_λ e tutte le volte che $\lambda \leq \mu$ sia data una mappa $f_{\mu\lambda} : M_\lambda \longrightarrow M_\mu$ che soddisfa le condizioni

$$f_{\lambda\lambda} = 1, \text{ e } f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda} = f_{\nu\lambda} \text{ se } \lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Definizione 2.2. Definiamo $\{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}$ come sopra un *sistema diretto* su Λ.

Se ogni M_λ è un anello e ogni $f_{\mu\lambda}$ un omomorfismo di anelli allora chiamiamo $\{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}$ un *sistema diretto di anelli*[1].

Dati due sistemi diretti $\mathfrak{F} = \{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}$ e $\mathfrak{F}' = \left\{M'_\lambda; f'_{\mu\lambda}\right\}$ su uno stesso insieme, un morfismo γ è un sistema di mappe $\{\gamma_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M'_\lambda\}$ tale che

$$f'_{\mu\lambda} \circ \gamma_\lambda = \gamma_\mu \circ f_{\mu\lambda},\ \lambda < \mu$$

quindi è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M_\lambda & \xrightarrow{\gamma_\lambda} & M'_\lambda \\ {\scriptstyle f_{\mu\lambda}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f'_{\mu\lambda}} \\ M_\mu & \xrightarrow{\gamma_\mu} & M'_\mu \end{array}$$

Per mappa da $\mathfrak{F}$ in un insieme X intendiamo un sistema $\{\varphi_\lambda\}$ di mappe $\varphi_\lambda : M_\lambda \longrightarrow X$ tali che $\varphi_\lambda = \varphi_\mu \circ f_{\mu\lambda}$. Ora se una mappa $\psi : \mathfrak{F} \longrightarrow M_\infty$ gode della proprietà universale per le mappe da $\mathfrak{F}$ negli insiemi, ovvero per ogni mappa $\varphi : \mathfrak{F} \longrightarrow X$ esiste unica la mappa $h : M_\infty \longrightarrow X$ tale che $\varphi_\lambda = h \circ \psi_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora M_∞ è detto il *limite diretto* di $\mathfrak{F}$ e si scrive $M_\infty = \varinjlim M_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[rr, "f_{\mu\lambda}"] \arrow[dr, "\psi_\lambda"] \arrow[ddr, "\varphi_\lambda"'] & & M_\mu \arrow[dl, "\psi_\mu"'] \arrow[ddl, "\varphi_\mu"] \\ & M_\infty \arrow[d, dashed, "h"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

Come si può vedere facilmente dalla definizione, una mappa $\gamma : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}'$ induce una mappa $\varinjlim M_\lambda \longrightarrow \varinjlim M'_\lambda$ che indichiamo con γ_∞.

Il limite di un sistema diretto $\mathfrak{F} = \{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}$ esiste sempre. Per costruirlo facciamo i seguenti passagi: prendiamo l'unione disgiunta $\bigsqcup_\lambda M_\lambda$ degli M_λ, definiamo la relazione di equivalenza:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in M_\lambda, y \in M_\mu, \text{e esiste } \nu \\ \text{tale che } \lambda \le \nu,\ \mu \le \nu \text{ e } f_{\nu\lambda}(x) = f_{\nu\mu}(y) \end{cases}$$

[1]Più in generale, possiamo definire sistemi diretti in ogni categoria.

Si ha in effetti che $\sim$ è di equivalenza infatti:

(riflessiva) prendendo $\nu = \lambda \Longrightarrow f_{\lambda\lambda} = id$;

(simmetrica) vale per definizione;

(transitiva) Siano $x \in M_\lambda, y \in M_\mu, z \in M_\sigma$ tali che $x \sim y$, $y \sim z$ in particolare $\lambda, \mu \leq \nu_1$ e $\mu, \sigma \leq \nu_2$ per le proprietà di insieme diretto esiste ν tale che $\nu_1 \leq \nu$, $\nu_2 \leq \nu$ e quindi $f_{\nu\lambda}(x) = f_{\nu\mu}(y)$, $f_{\nu\mu}(y) = f_{\nu\sigma}(z)$ allora $f_{\nu\lambda}(x) = f_{\nu\sigma}(z)$.

Ora definiamo $M_\infty = \bigsqcup_\lambda M_\lambda / \sim$. Mostriamo che questo è proprio il limite cercato.

Abbiamo una mappa φ da $\mathfrak{F}$ a X. Definiamo la mappa $\psi : \mathfrak{F} \longrightarrow M_\infty : x \longmapsto [x]_\sim$. Allora abbiamo che preso un elemento $x \in M_\lambda$ per definizione $\psi_\lambda(x) = \psi_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x)$. La proprietà del sistema diretto per cui $f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda} = f_{\nu\lambda}$ se $\lambda \leq \mu \leq \nu$ mi assicura che $x \sim f_{\mu\lambda}(x)$ quindi esiste una h così definita

$$h : M_\infty \longrightarrow X : h([x]_\sim) = \varphi(x).$$

L'unicità è data dal fatto che le scelte sono obbligate dalla mappa φ scelta.

Osserviamo inoltre che la mappa $\psi_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M_\infty : x \longmapsto [x]_\sim$ è un omomorfismo di anelli che induce la struttura di anello su M_∞.

2.2 Definizione di prefascio, fascio ed esempi

In questa sezione definiamo i concetti di prefascio e fascio di anelli e discutiamo le loro prime proprietà. Il concetto di fascio è centrale in geometria, tuttavia per noi sarà strumentale per dare una definizione alternativa di varietà differenziabile. Se non sarà diversamente esplicitato, X denoterà uno spazio topologico.

Definizione 2.3. Un *prefascio* di anelli $\mathcal{F}$ su X è una assegnazione

$$U \longrightarrow \mathcal{F}(U),\ U \text{ aperto in } X,\ \mathcal{F}(U) \text{ anello}$$

con la seguente proprietà. Se U, V sono due aperti di X tali che $U \subset V$, allora esiste un morfismo $r_{U,V} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ detto *restrizione* tale che

i) $r_{U,U} = id$;

ii) $r_{U,W} = r_{U,V} \circ r_{V,W}$, con $U \subset V \subset W$.

Denoteremo spesso $r_{U,V}(f) = f_{|U}$.

Definizione 2.4. Il prefascio $\mathcal{F}$ è un *fascio* se dato $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di U e una famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$, $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tale che $f_{i|_{U_i \cap U_j}} = f_{j|_{U_i \cap U_j}}$ per ogni $i, j \in I$ allora esiste ed è unica $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f_{|_{U_i}} = f_i$.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono detti *sezioni* su U. $\mathcal{F}(X)$ si dice l'anello delle *sezioni globali.*

Ora facciamo due esempi per chiarire le definizioni di prefascio e fascio. Con il primo esempio vedremo che non tutti i prefasci sono fasci.

Esempio 2.5. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{C}$ l'assegnazione che ad ogni aperto U assegna l'anello $\mathcal{F}(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = c\}$, cioè gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono le funzioni costanti su U. Sia $r_{U,V}$ la restrizione canonica, che ovviamente rispetta le condizioni richieste dalla definizione di prefascio, dunque $\mathcal{C}$ è un prefascio su X. $\mathcal{C}$ tuttavia non è un fascio, infatti sia $U = U_1 \cup U_2$ unione di aperti disgiunti. Prendiamo ora $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tale che $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto i$ poiché gli aperti sono disgiunti banalmente $f_{1|_{U_1 \cap U_2}} = f_{2|_{U_1 \cap U_2}}$. Però chiaramente non riusciamo a definire una $f \in \mathcal{F}(U)$ costante che valga 1 su U_1 e 2 su U_2. Quindi $\mathcal{C}$ non è un fascio.

Esempio 2.6. Sia X una varietà differenziabile, U un aperto di X e

$$C_X^\infty(U) = \{\text{funzioni differenziabili su } X \text{ ristrette ad } U\}.$$

Mostriamo che l'assegnazione

$$U \longrightarrow C_X^\infty(U)$$

è un fascio di anelli.

Banalmente $(C^\infty(U), +, \cdot)$ è un anello per ogni U aperto di X. Inoltre la restrizione canonica soddisfa le condizioni per la definizione di prefascio.

La prossima proposizione mostra che C^∞_X è un fascio.

Proposizione 2.7. *Siano X, Y spazi topologici e $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Siano $f_i : U_i \longrightarrow Y$ funzioni differenziabili (continue) e tali che $f_i(x) = f_j(x), \forall x \in U_i \cap U_j$. Allora esiste un unica $h : X \longrightarrow Y$ differenziabile (continua) tale che $h_{|U_i} = f_i$.*

Dimostrazione. Sia $h(x) = f_i(x)$, $x \in U_i$. La h è ben definita sulle intersezioni per ipotesi. Sia $U \subset Y$ aperto. Allora $h^{-1}(U) = \bigcup\limits_i f_i^{-1}(U \cap U_i)$ è aperto perché unione di aperti. Quindi h è continua. Anche tutte le derivate sono continue, infatti per ipotesi $f_i(x) = f_j(x), \forall x \in U_i \cap U_j$ poiché U_i e U_j sono aperti le funzioni sono uguali in un intorno aperto di x, quindi vale $f_i^{(n)}(x) = f_j^{(n)}(x), \forall x \in N \subset (U_i \cap U_j)$ per ogni n. $\square$

Possiamo allora concludere, per quanto appena dimostrato, che C^∞_X è un fascio di anelli e si dirà il *fascio delle funzioni differenziabili* su X. In modo del tutto analogo possiamo definire il fascio delle funzioni continue o delle funzioni analitiche su uno spazio topologico X.

Per completare la nostra esposizione delle definizioni principali della teoria dei fasci diamo la nozione di morfismo.

Definizione 2.8. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due prefasci su X. Un *morfismo di prefasci* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ è una collezione di morfismi $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, per ogni aperto U in X, tali che per ogni $U \subset V$ il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \\ {\scriptstyle r_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{U,V}} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Un *morfismo di fasci* è un morfismo sui prefasci associati.

Un morfismo di prefasci è *iniettivo o un monomorfismo* se $ker(\varphi) = 0$. Quindi φ è iniettivo se e solo se sono iniettivi tutti i morfismi φ_U.

Un morfismo di prefasci è *suriettivo o un epimorfismo* se il prefascio $Im(\varphi) = \mathcal{G}$.

Un morfismo di prefasci è un *isomorfismo* se è iniettivo e suriettivo.

Esempio 2.9. Siano M e N due varietà differenziabili e $f : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo. Mostriamo che f induce un morfismo di fasci su N:

$$f^* : C_N^\infty \longrightarrow f_* C_M^\infty$$

ove $f_* C_M^\infty$ è il fascio su N definito nel modo seguente. Per ogni U un aperto in N e $f^{-1}(U) \in M$ si ha che $f_* C_M^\infty(U) = C_M^\infty\left(f^{-1}(U)\right)$. Dobbiamo trovare un morfismo f^* che renda commutativo il diagramma per ogni U, V

$$\begin{array}{ccc} C_N^\infty(V) & \xrightarrow{f_V^*} & C_M^\infty(f^{-1}(V)) \\ {\scriptstyle r_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{f^{-1}(U),f^{-1}(V)}} \\ C_N^\infty(U) & \xrightarrow{f_U^*} & C_M^\infty(f^{-1}(U)) \end{array}$$

Definiamo

$$f_U^* : C_N^\infty(U) \longrightarrow C_M^\infty(f^{-1}(U)), \phi \longmapsto \phi \circ f$$

che risulta essere una funzione differenziabile, perché composizione di funzioni differenziabili.

Sia dunque $\phi \in C_N^\infty(V)$ dobbiamo mostrare che

$$f^* \circ r_{U,V}(\phi) = r_{f^{-1}(U),f^{-1}(V)} \circ f^*(\phi)$$

Siccome r, f^* e ϕ sono differenziabili allora ogni loro composizione risulta differenziabile, quindi

$$\begin{array}{ccccc} C_N^\infty(V) & \xrightarrow{r_{U,V}} & C_N^\infty(U) & \xrightarrow{f_U^*} & C_M^\infty(f^{-1}(U)) \\ \phi & \longmapsto & \phi_{|U} & \longmapsto & \phi_{|U} \circ f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C_N^\infty(V) & \xrightarrow{f_V^*} & C_M^\infty(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{r_{f^{-1}(U),f^{-1}(V)}} & \in C_M^\infty(f^{-1}(U)) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ f & \longmapsto & \phi \circ f_{|_{f^{-1}(U)}} = \phi_{|U} \circ f \end{array}.$$

$\square$

Definiamo uno degli oggetti più importanti associati a un prefascio che è la *spiga* del prefascio in un punto.

Definizione 2.10. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio sullo spazio topologico X e $x \in X$ un punto. Allora definiamo la *spiga* $\mathcal{F}_x$ come il limite diretto

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U)$$

dove il limite diretto è calcolato per il sistema diretto degli intorni aperti di $x \in X$.

Gli elementi in $\mathcal{F}_x$ sono detti i *germi delle sezioni.*

Esiste un'utile caratterizzazione della spiga di un prefascio.

Proposizione 2.11. *Per ogni $x \in X$ la spiga $\mathcal{F}_x$ consiste nell'unione di tutte le coppie (U, s) con U intorno aperto di x e $s \in \mathcal{F}(U)$ sezione, modulo la seguente relazione di equivalenza: $(U, s) \cong (V, t)$ se e solo se esiste un intorno W di x, $W \subset (U \cap V)$ e tale che $s_{|W} = t_{|W}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\{\mathcal{F}(V), r_{U,V}\}$ è un sistema diretto di anelli per la proprietà del prefascio.

Abbiamo definito la spiga $\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U)$ con U un intorno aperto di x.

Calcoliamo il limite diretto. Come abbiamo visto nella sezione 2.1 il limite diretto consiste nell'unione disgiunta $\bigsqcup_U \mathcal{F}(U) = \bigcup_U \{(U, s) : s \in \mathcal{F}(U)\}$ modulo la relazione di equivalenza:

$$s \sim t \Longleftrightarrow \begin{cases} s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V), \text{e esiste } W \\ \text{tale che } W \subset U,\ W \subset V \text{ e } s_{|W} = t_{|W}. \end{cases}$$

Cioè $\mathcal{F}_x = \bigsqcup \mathcal{F}(U)/\sim$. Quindi fissato $x \in X$ la spiga $\mathcal{F}_x$ consiste proprio nell'unione di tutte le coppie (U, s) con U intorno aperto di x e $s \in \mathcal{F}(U)$, modulo la relazione di equivalenza: $(U, s) \cong (V, t)$ se e solo se esiste un intorno W di x, $W \subset (U \cap V)$ e tale che $s_{|W} = t_{|W}$. $\square$

Osserviamo che un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ di prefasci in X induce per ogni punto x un morfismo sulle spighe $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x : s_x \longmapsto \varphi(s)_x$, dove s indica una sezione e s_x ne indica il germe nel punto x.

Proposizione 2.12. *Sia $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su X. Allora φ è un isomorfismo se e solo se la mappa indotta sulle spighe $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ è un isomorfismo per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia φ un isomorfismo di fasci.

Mostriamo che φ_x è iniettivo. Sia $s_x \in \mathcal{F}_x$ il germe di s in x. Supponiamo che $\varphi(s)_x = 0$. Allora, per la definizione di germe esiste un intorno U_x di x su cui $\varphi(s)$ è uguale a 0, ma poiché φ è iniettivo allora anche $s = 0$ su tutto l'intorno, quindi $s_x = 0$. Ciò prova l'iniettività di φ_x.

Mostriamo ora che φ_x è suriettivo. Allora sia $t_x \in \mathcal{G}_x$ un germe. $\mathcal{G}_x$ è limite diretto in U, intorno aperto di x, allora esiste una mappa naturale $\psi_U : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}_x : t_U \longmapsto t_x$. Ma ora poiché φ è suriettiva ed iniettiva esiste una sola $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi(s) = t_U$ e quindi hanno le stesse spighe $\varphi(s)_x = t_x$. Quindi se chiamiamo s_x il germe della sezione s per l'iniettività di φ_x abbiamo che $\varphi_x(s_x) = t_x$.

Viceversa, supponiamo che φ_x sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Per mostrare che φ è un isomorfismo sarà sufficiente mostrare che $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo per ogni U, infatti possiamo definire un morfismo inverso ϕ tale che $\phi_U = \varphi_U^{-1}$ per ogni U.

Mostriamo che φ_U è iniettivo. Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione e supponiamo che $\varphi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ sia 0. Allora per ogni $x \in U$ l'immagine $\varphi_U(s)_x$ di $\varphi_U(s)$ nella spiga $\mathcal{G}_x$ è 0. Siccome φ_x è iniettivo per ogni x, deduciamo che s_x è uguale a 0 nella spiga $\mathcal{F}_x$ per ogni $x \in U$. Dire che $s_x = 0$ significa che esiste un intorno aperto W_x di x, con $W_x \subseteq U$, tale che $s_{|W_x} = 0$. Ora per ogni x U risulta ricoperto di intorni W_x in cui vale quanto appena detto, quindi per la proprietà di fascio $s = 0$ in U. Quindi φ_U è iniettiva.

Ora proviamo che φ_U è suriettiva. Sia $t \in \mathcal{G}(U)$ una sezione. Allora per ogni x si ha che t_x è il germe della sezione t. Sappiamo che φ_x è suriettiva, quindi esiste $s_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $\varphi_x(s_x) = t_x$. Consideriamo s_x rappresentato da una sezione $s(x)$ in un intorno V_x di x. Allora $\varphi_{V_x}(s(x))$ e $t_{|V_x}$ sono due sezioni di $\mathcal{G}(V_x)$ che hanno lo stesso germe in x. Allora, scegliendo opportunamente V_x, possiamo assumere che $\varphi_{V_x}(s(x)) = t_{|V_x}$ in $\mathcal{G}(V_x)$. Ora possiamo ricoprire

U di aperti V_x sui quali è definita la sezione $s(x) \in \mathcal{F}(V_x)$. Se x, y sono due punti allora $s(x)_{|V_x \cap V_y}$ e $s(y)_{|V_x \cap V_y}$ sono due sezioni di $\mathcal{F}(V_x \cap V_y)$ che sono entrambe mappate tramite $\varphi_{V_x \cap V_y}$ in $t_{|V_x \cap V_y}$ e per l'iniettività di φ sono uguali. Allora per la proprietà dei fasci esiste una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_{|V_x} = s(x)$ per ogni x. Infine dobbiamo provare che $\varphi_U(s) = t$. Sappiamo che $\varphi_U(s)$ e t sono due sezioni di $\mathcal{G}(U)$ e per ogni x si ha che $\varphi(s)_{|V_x} = t_{|V_x}$, allora per la proprietà dei fasci possiamo concludere che $\varphi(s) = t$. Vedi [9] secondo capitolo, proposizione 1.1. □

2.3 Spazio étalé

Nel lavoro [15] in cui Serre originariamente introdusse il concetto di fascio lo *spazio étalé* occupa un posto centrale.

Ripercorriamo nei suoi tratti fondamentali la definizione che fornisce Serre di fascio.

Definizione 2.13 (Definizione alternativa di fascio)**.** Sia X uno spazio topologico. Un *fascio* $\mathcal{F}$ *di gruppi abeliani* su X (o semplicemente un *fascio*) è dato da:

(a) Una funzione $x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ che fa corrispondere a ogni $x \in X$ un gruppo abeliano $\mathcal{F}_x$;

(b) Una topologia sull'insieme $\mathcal{F}$, somma degli insiemi $\mathcal{F}_x$.

Se f è un elemento di $\mathcal{F}_x$, poniamo $\pi(f) = x$; l'applicazione π è detta la *proiezione* di $\mathcal{F}$ su X, il sottoinsieme di $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ formato dalle coppie (f, g) tali che $\pi(f) = \pi(g)$ sarà denotato da $\mathcal{F} + \mathcal{F}$.

I due assiomi a cui sono soggetti i dati di (a) e (b) affinché si possa parlare di fascio sono:

(I) per ogni $f \in \mathcal{F}$, esiste un intorno V di f e un intorno U di $\pi(f)$ tale che la restrizione di π a V sia un omeomorfismo di V su U, in altre parole π è un omeomorfismo locale;

(II) l'applicazione $f \longrightarrow -f$ è una applicazione continua di $\mathcal{F}$ in se stesso, e l'applicazione $(f, g) \longrightarrow f + g$ è una applicazione continua da $\mathcal{F} + \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$.

Esempio 2.14. Sia G un gruppo abeliamo, poniamo $\mathcal{F}_x = G$ per ogni x; allora l'insieme $\mathcal{F}$ può essere identificato con $X \times G$ che se munito della topologia prodotto della topologia di X per la topologia discreta di G si ottiene un fascio, detto il *fascio costante*, spesso identificato con G.

Definiamo ora cos'è una sezione di un fascio.

Definizione 2.15. Sia $\mathcal{F}$ un fascio sullo spazio X, e sia U un sottoinsieme di X. Si dice *sezione* di $\mathcal{F}$ rispetto a U una applicazione continua $s : U \longrightarrow \mathcal{F}$ tale che $\pi \circ s$ sia l'applicazione identica di U.

Si ha dunque $s(x) \in \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in U$. L'insieme delle sezioni di $\mathcal{F}$ rispetto a U si scrive $\Gamma(U, \mathcal{F})$; l'assioma (II) garantisce che $\Gamma(U, \mathcal{F})$ sia un gruppo abeliano. Se $U \subset V$ e se s è una sezione rispetto a V, allora la restrizione di s a U è una sezione rispetto a U; quindi $r_{U,V} : \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ è un omomorfismo.

Se U è un aperto in X ed $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $s(U)$ è un aperto in $\mathcal{F}$, quindi per U che varia in una base di aperti di X, $s(U)$ costituisce una base di aperti di $\mathcal{F}$: che è un altro modo per esprimere l'assioma (I).

Osserviamo un'altra conseguenza dell'assioma (I): per ogni $f \in \mathcal{F}_x$ esiste una sezione s rispetto a un intorno di x tale che $s(x) = f$, e due sezioni che godono di questa proprietà in un intorno di x coincidono. Altrimenti detto, $\mathcal{F}_x$ è il limite induttivo di $\Gamma(U, \mathcal{F})$ rispetto all'inclusione degli intorni di x.

Lo stesso Serre osserva che la nozione di fascio può essere definita per ogni struttura algebrica. In paricolare un fascio di anelli $\mathcal{A}$ è un fascio di gruppi abeliani $\mathcal{A}_x$, dove ogni $\mathcal{A}_x$ è munito di una struttura di anello tale che l'applicazione $(f, g) \longrightarrow fg$ è una applicazione continua.

Supporremo sempre che $\mathcal{A}_x$ sia un anello con unità, che varia con continuità rispetto a x.

Serre dimostra nel medesimo lavoro già citato, che questa definizione di fascio e quella data in 2.4 sono canonicamente isomorfe.

Definizione 2.16. Uno *spazio étalé* su uno spazio topologico X è uno spazio topologico E cui è associato un omeomorfismo locale $\pi : E \longrightarrow X$.

Osserviamo che la definizione di *spazio étalé* è strettamente collegata alla costruzione del fascio illustrata da Serre. Infatti introdurre gli spazi étalé è molto utile perché permette di associare canonicamente un fascio ad un prefascio.

Costruiamo ora lo spazio étalé $\bar{\mathcal{F}}$ associato a un prefascio $\mathcal{F}$, in altre parole mostriamo una parte della sostanziale equivalenza tra le definizione date.

Definizione 2.17. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X. Definiamo

$$\bar{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

ove $\mathcal{F}_x$ denota come sempre la spiga del prefascio nel punto $x \in X$.

Osservazione 2.18. *$\bar{\mathcal{F}}$ è uno spazio étalé su X.*

Dimostrazione. Infatti la mappa $\pi : \bar{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ è quella ovvia che manda un elemento di $\mathcal{F}_x$ in x. Una base per la topologia di $\bar{\mathcal{F}}$ è

$$\{s(U) \,|\, U \text{ aperto di X}, s \in \mathcal{F}(U)\}.$$

dunque possiamo ottenere l'omeomorfismo locale, come detto in un'osservazione precedente. □

Ora possiamo definire in modo naturale un fascio a partire dallo spazio étalé $\bar{\mathcal{F}}$ associato a $\mathcal{F}$:

$$U \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}(U),\, U \text{ aperto}$$

con $\hat{\mathcal{F}} = \Gamma(U, \bar{\mathcal{F}})$.

Innanzitutto osserviamo che che $\hat{\mathcal{F}}$ con la restrizione canonica è un prefascio. Ora supponiamo di avere $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di U e per ogni U_i è definita una $s_i \in \Gamma(U_i, \bar{\mathcal{F}})$ con le proprietà della definizione di fascio 2.4. Allora per la proposizione 2.7 esiste una ed una sola $s \in \Gamma(U, \bar{\mathcal{F}})$ che coincide con le sezioni s_i sugli aperti U_i quindi $\hat{\mathcal{F}}$ è un fascio.

Definizione 2.19. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio, il fascio $\hat{\mathcal{F}}$ delle sezioni dello spazio étalé $\bar{\mathcal{F}}$ associato a $\mathcal{F}$ è detta la *fascificazione di* $\mathcal{F}$.

Ora costruiremo la fascificazione del prefascio definito nell'esercizio 2.5.

Esempio 2.20. Sia $\mathcal{C}$ il prefascio delle funzioni costanti su X spazio topologico a valori in $\mathbb{R}$. Costruiamo lo spazio étalé di $\mathcal{C}$. Sia $\mathcal{C}_x = (\mathbb{R}, x)$ la spiga nel punto x. Quindi lo spazio étalé è $\bar{\mathcal{C}} = \bigsqcup_{x \in U} (\mathbb{R}, x)$ con π ovvia.

La topologia è data dalla base di aperti

$$\{s(V) \,|\, V \text{ aperto di X}, s \in \mathcal{C}(V)\} =$$

$$= \{\{(c_s, x) \,|\, x \in V\} \,|\, U \subset X \text{ aperto}, s \in \mathcal{C}(V)\}\,.$$

Allora il nostro fascio $\hat{\mathcal{C}}$ è dato dall'assegnazione

$$U \longrightarrow \Gamma(U, \bar{\mathcal{C}})$$

con $\Gamma(U, \bar{\mathcal{C}})$ che sono funzioni tali che $f : U \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}$ sono continue e $\pi \circ f = id_U$. Per come è definita la topologia dello spazio étalé abbiamo che se $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di U, allora f risulta continua se è costante sugli U_i. Quindi siamo partiti dal prefascio delle funzioni costanti e abbiamo costruito il fascio delle funzioni localmente costanti.

Definizione 2.21. Sia $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. Definiamo *prefascio kernel di* φ, *prefascio cokernel di* φ e *prefascio immagine di* φ i prefasci dati rispettivamente da $U \longrightarrow \ker(\varphi_U)$, $U \longrightarrow coker(\varphi_U)$, $U \longrightarrow Im(\varphi_U)$.

Osservazione 2.22. *Osserviamo che se φ è un morfismo di fasci allora il prefascio del kernel è un fascio, mentre in generale i prefasci del coker e dell'immagine non sono fasci. Grazie alla costruzione introdotta dello spazio etalé possiamo dire che $U \longrightarrow Im(\varphi_U)$(o $coker(\varphi_U)$) è un fascio se è isomorfo alla sua fascificazione.*

Vediamo prima che che l'assegnazione

$$U \longrightarrow \ker(\varphi_U), U \text{ aperto}$$

è un fascio. Sia φ un morfismo di fasci. Il $ker(\varphi_U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \varphi_U(s) = 0\}$. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di U e $\{s_i\}$ una famiglia di sezioni come nella definizione allora per la proprietà del morfismo dei fasci vale:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "r_{U,U_i}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_{U,U_i}"] \\ \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] & \mathcal{G}(U_i) \end{tikzcd}$$

Quindi vale $\varphi_U(s)_{|U_i} = \varphi_{U_i}(s_{|U_i})$. Abbiamo quindi trovato una $s \in ker(\varphi_U)$ tale che $s_{|U_i} = s_i$.

Ora vediamo che in generale

$$U \longrightarrow Im(\varphi_U)$$

non è un fascio. Ad esempio, sia $U \subset \mathbb{C}$ e siano $U \longrightarrow \mathcal{H}(U)$ e $U \longrightarrow \mathcal{H}^*(U)$ due fasci dove $\mathcal{H}(U)$ è l'insieme delle funzioni olomorfe su U e $\mathcal{H}^*(U)$ il gruppo moltiplicativo delle funzioni olomorfe non nulle su U e $r_{V,U}$ per entrambi la restrizione canonica. Sia

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ & f & \longmapsto & e^{2\pi \imath f} \end{array}$$

Sia z la coordinata analitica globale sulla varietà analitica $\mathbb{C}$. La sezione $z \in \mathcal{H}^*(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\})$ non è immagine di $\mathcal{H}(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\})$ tramite exp, mentre la sua restrizione ad ogni aperto contraibile $U \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è immagine di $\mathcal{H}(U)$. Per maggiori dettagli si veda [7] capitolo 3 pagg 36-37.

2.4 Varietà differenziabili come spazi anellati

In questa sezione vogliamo studiare le varietà differenziabili da un punto di vista diverso e cioè come spazi localmente anellati.

Diamo ora la definizione di *anello locale*.

Definizione 2.23. Sia A un anello commutativo. Diremo che A è un *anello locale* se e solo se A ha un unico ideale massimale.

Osserviamo che A è anello locale di massimale m se e solo se $A \setminus m$ è costituito da elementi invertibili.

Definizione 2.24. Si definisce *spazio anellato* una coppia $M = (|M|, \mathcal{F})$, $|M|$ spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio di anelli commutativi su $|M|$.

Un *morfismo di spazi anellati* $\phi : M = (|M|, \mathcal{O}_M) \longrightarrow N = (|N|, \mathcal{O}_N)$ consiste di un morfismo $|\phi| : |M| \longrightarrow |N|$ tra spazi topologici e un morfismo di fasci $\phi^* : \mathcal{O}_N \longrightarrow \phi_* \mathcal{O}_M$ dove $\phi_* \mathcal{O}_M$ è un fascio su $|N|$ definito come segue: $(\phi_* \mathcal{O}_M)(U) = \mathcal{O}_M(|\phi|^{-1}(U))$ per ogni U aperto in $|N|$.

Un morfismo di spazi anellati induce un morfismo sulle spighe per ogni $x \in |M|$: $\phi_x : \mathcal{O}_{N,|\phi|(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{M,x} : s_{|\phi|(x)} \longmapsto (s \circ |\phi|)_x$.

Definizione 2.25. Si dice che lo spazio anellato $M = (|M|, \mathcal{F})$ è *localmente anellato* se la spiga, $\mathcal{F}_x$, del fascio $\mathcal{F}$ in x è un anello locale per ogni $x \in |M|$.

Definizione 2.26. Se M e N sono localmente spazi anellati, ϕ è un *morfismo di spazi localmente anellati* se ϕ_x è locale, ovvero $\phi_x^{-1}(m_{M,x}) = m_{N,|\phi|(x)}$ dove $m_{N,|\phi|x}$ e $m_{M,x}$ sono ideali massimali rispettivamente negli anelli locali $\mathcal{O}_{N,|\phi|(x)}$ e $\mathcal{O}_{M,x}$.

Ora diamo un esempio di spazio localmente anellato.

Esempio 2.27. $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$ è uno spazio localmente anellato, dove $C^\infty_{\mathbb{R}^n}$ è il fascio delle funzioni differenziabili su $\mathbb{R}^n$. Infatti è evidente che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio topologico, con l'usuale topologia, inoltre per quanto visto in 2.6 $C^\infty_{\mathbb{R}^n}$

è un fascio di anelli commutativi su $\mathbb{R}^n$. Abbiamo così provato che $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$ è uno spazio anellato.

Dobbiamo ora mostrare che è uno spazio localmente anellato, quindi che la spiga $C^\infty_{\mathbb{R}^n,x}$ è un anello locale. Consideriamo U, V aperti che contengono x e f, g carte differenziabili rispettivamente di U, V. Per quanto visto in 2.11 gli elementi di $C^\infty_{\mathbb{R}^n,x}$ sono le classi di equivalenza definite dalla relazione

$$(f, U) \sim (g, V) \iff (\exists W \subset U \cap V : f_{|W} = g_{|W}).$$

Quindi si ha che $C^\infty_{\mathbb{R}^n,x}$ è l'anello costituito dai germi delle funzioni nel punto x. Sia $m = \left\{ f \in C^\infty_{M,x} \,|\, f(x) = 0 \right\}$. Sia ora $f \in m$, $g \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,x}$ allora $f(x)g(x) = 0 \in m$, quindi m è un ideale.

Per quanto detto è sufficiente mostrare che se $g \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,x} \setminus m$ allora g è un elemento invertibile. Consideriamo $g \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,x} \setminus m$ allora $g(x) \neq 0$ e quindi per continuità esiste un intorno di x in cui posso definire $\frac{1}{g}$, quindi g è un elemento invertibile in $C^\infty_{\mathbb{R}^n,x}$.

Teorema 2.28. *Sia dato $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ uno spazio localmente anellato. M è una varietà differenziabile se e solo se è localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$.*

Dimostrazione. Sia M un varietà differenziabile secondo la definizione 1.26, consideriamo l'insieme di tutte le carte differenziabili su $|M|$ ovvero C^∞_M. Abbiamo già provato in 2.6 che C^∞_M è un fascio di anelli. Dobbiamo mostrare che $(|M|, C^\infty_M)$ è uno spazio localmente anellato, ovvero che per ogni $x \in |M|$ la spiga $C^\infty_{M,x}$ è un anello locale. É sufficiente ripercorrere quanto già visto nell'esempio 2.27

Consideriamo U, V aperti che contengono x e f, g carte differenziabili rispettivamente di U, V. Gli elementi di $C^\infty_{M,x}$ sono le classi di equivalenza definite dalla relazione

$$(f, U) \sim (g, V) \iff (\exists W \subset U \cap V : f_{|W} = g_{|W})$$

per quanto visto in 2.11. Allora la spiga $C^\infty_{M,x}$ è l'anello costituito dai germi delle funzioni nel punto x. Sia $m = \left\{ f \in C^\infty_{M,x} \,|\, f(x) = 0 \right\}$. Sia ora $f \in m$ e $g \in C^\infty_{M,x}$ allora $f(x)g(x) = 0 \in m$ quindi m è un ideale.

Per mostrare che è l'unico massimale è sufficiente mostrare che se $g \in C^{\infty}_{M,x} \smallsetminus m$ allora g è un elemento invertibile. Sia allora $g \in C^{\infty}_{M,x} \smallsetminus m$ allora $g(x) \neq 0$ e quindi per continuità esiste un intorno di x in cui posso definire $\frac{1}{g}$, quindi g è invertibile.

Viceversa sia ora $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ uno spazio localmente anellato.

Poiché M è localmente isomorfo a $(\mathbb{R}^n, C^{\infty}_{\mathbb{R}^n})$, abbiamo localmente un isomorfismo $|\phi|_W : \phi^{-1}(W) \longrightarrow W$, con $W \subseteq M$ e un isomorfismo tra fasci $\phi^* : \mathcal{O}_M \longrightarrow \phi_* C^{\infty}_{\mathbb{R}^n}$ con $\phi_* C^{\infty}_{\mathbb{R}^n}$ un fascio su $|M|$ definito come segue: sia $V \left(= |\phi|^{-1}(U)\right)$ un aperto di $C^{\infty}_{\mathbb{R}^n}$, allora $(\phi_*\ C^{\infty}_{\mathbb{R}^n})(V) = C^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(|\phi|^{-1}(U))$, ma $|\phi|$ è un isomorfismo tra spazi topologici, quindi $(\phi_* C^{\infty}_{\mathbb{R}^n})(V) = C^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(V)$. Poiché $\phi^* : C^{\infty}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M$ è un isomorfismo abbiamo che i due fasci sono isomorfi. Inoltre essendo ϕ un isomorfismo, anche ϕ_x è un isomorfismo quindi vale $\phi_x^{-1}(m_{\mathbb{R}^n,x}) = m_{M,|\phi|(x)}$ poiché $m_{\mathbb{R}^n,x}$ e $\phi_x^{-1}(m_{M,x})$ sono ideali massimali rispettivamente degli anelli locali $C^{\infty}_{\mathbb{R}^n,|\phi|(x)}$ e $\mathcal{O}_{M,x}$.

Consideriamo il germe $t_{|\phi|(x)} \in \mathcal{O}_{M,|\phi|(x)} \setminus m_{M,|\phi|(x)}$ a cui è associato l'immagine $\phi_x(t_{|\phi|(x)}) = f_x \notin m_{\mathbb{R}^n,x}$, allora, per ragioni di continuità, esiste una funzione $f(x) \neq 0$ che non si annulla in un intorno aperto $U_{f,x}$. Posso reiterare questo procedimento per ogni $x \in M$. Allora l'unione di tutti gli intorni $U_{f,x}$ è un ricoprimento aperto di $|M|$. Inoltre date due funzioni f, g che non si annullano sui rispettivi domini, $U_{f,x}$ e $U_{g,y}$. Allora $g \circ f^{-1}$ è un diffeomorismo. Inoltre anche f è un diffeomorfismo, quindi $f\left(U_{f,x} \cap U_{g,y}\right)$ è aperto. Abbiamo quindi definito un atlante $\mathcal{A} = \{(U_{f,x}, f)\}$ differenziabile su $|M|$. Quindi $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ è una varietà differenziabile come in 1.26. $\square$

Il teorema 2.28 ci permette di dare una definizione equivalente alla 1.26 di varietà differenziabile.

Definizione 2.29. Sia $|M|$ uno spazio topologico di Hausdorff e che soddisfa il 2° assioma di numerabilità, e sia $\mathcal{O}_M$ un fascio di anelli commutativi su $|M|$. Si dice che $(|M|, \mathcal{O}_M)$ è una *varietà differenziabile* finito dimensionale se è localmente isomorfa allo spazio localmente anellato $(\mathbb{R}^n, C^{\infty}_{\mathbb{R}^n})$.

Osserviamo che la definizione 2.29 e il teorema 2.28 si possono estendere alle varietà infinito dimensionali chiedendo l'isomorfismo locale rispetto a $(\mathbf{E}, C^{\infty}_{\mathbf{E}})$ con $\mathbf{E}$ spazio di Banach.

Capitolo 3

Sezioni Globali

Ora affronteremo il problema di come sia possibile ricostruire lo spazio topologico $|M|$ e il fascio strutturale C^∞_M di una varietà $M = (|M|, C^\infty_M)$ attraverso l'algebra delle sezioni globali $C^\infty(M)$.

3.1 R-algebre associative

Introduciamo in questa sezione la definizioni di *R-algebre associative* e dei relativi morfismi.

Definizione 3.1. Sia R un anello commutativo fissato. Una *R-algebra associativa* è un gruppo abeliano A che ha sia la struttura di anello che di R-modulo. Ovvero la moltiplicazione è R-bilineare:

$$r \cdot (xy) = (r \cdot x)y = x(r \cdot y) \quad \forall r \in R, \forall x, y \in A.$$

Si dice che A è unitaria se contiene un elemento 1 tale che

$$1x = x = x1 \quad \forall x \in A$$

Definizione 3.2. Un morfismo tra due R-algebre associative è un omomorfismo di anelli R-lineare. Ovvero, $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ è un *omomorfismo di algebre associative* se (*i*) $\phi(rx) = r\phi(x)$;

(*ii*) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$;

(*iii*) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$;

per ogni $x, y \in A_1$ e per ogni $r \in R$. Se le algebre sono unitarie, vale anche

(*iv*) $\phi(1) = 1$.

3.2 Ricostruzione dello spazio topologico

Introduciamo un primo strumento che ci permette di definire globalmente proprietà che altrimenti sarebbero solo locali: la *partizione dell'unità*. Come vedremo gioca un ruolo fondamentale nella ricostruzione della varietà.

Lemma 3.3. *Sia* $\boldsymbol{E}$ *uno spazio normato. Consideriamo* $B_r(x_0) \subset \mathbf{E}$ *una palla di centro* x_0 *e raggio* r*. Allora per ogni* ε *esiste una funzione differenziabile, uguale a 1 sulla palla* $B_r(x_0)$*, compresa tra 0 e 1 sulla palla* $B_{r+\varepsilon}(x_0)$ *e 0 altrove.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$J_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & x \in B_r(x_0) \\ e^{-\dfrac{(\|x - x_0\| - r)^2}{\varepsilon^2 - (\|x - x_0\| - r)^2}} & x \in B_{r+\varepsilon}(x_0) \setminus B_r(x_0) \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r+\varepsilon}(x_0) \end{cases}$$

che è differenziabile in ogni punto come si voleva. □

Definizione 3.4. Sia X uno spazio topologico. Una famiglia di funzioni differenziabili $\{\theta_i\}$ tale che:

(*i*) $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$ e per ogni i;

(*ii*) Ogni $x \in X$ ha un intorno in cui solo un numero finito di θ_i non sono identicamente nulle;

(*iii*) Ogni funzione θ_i è identicamente nulla, eccetto che all'interno di un qualche insieme chiuso;

(*iv*) Per ogni $x \in X$ abbiamo $\sum_i \theta_i(x) = 1$;

si dice una *partizione differenziabile dell'unità.*

Osserviamo che per (*ii*) la somma (*iv*) ha un numero finito di termini.

Teorema 3.5. *Sia X un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^n$. Per ogni ricoprimento di X tramite sottoinsieme relativamente aperti $\{U_\alpha\}$ esiste una partizione differenziabile dell'unità.*

Dimostrazione. Ogni U_α può essere scritto come $X \cap W_\alpha$ per un qualche aperto W_α nello spazio ambiente euclideo $\mathbb{R}^n$. Sia $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$ e sia $\{K_j\}$ una successione nidificata di compatti *esaustiva* per l'aperto W. Ovvero,

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j = M$$

e $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$. (Per esempio, sia $K_j = \{z \in W : \|z\| < j$ e la distanza di z da $\mathbb{R}^n - W \geq 1/j\})$. La famiglia di tutte le palle aperte di $\mathbb{R}^n$ le cui chiusure appartengano ad almeno uno dei W_α è un ricoprimento aperto di W. Se ne scelgano un numero finito che ricoprono l'insieme K_2. Per ogni palla scelta possiamo trovare una funzione differenziabile, non negativa, che vale identicamente 1 sulla palla e si annulla fuori da un insieme chiuso contenuto in uno dei W_α. Chiamiamo queste funzioni $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$.

Continuiamo a costruire una successione di funzioni induttivamente. Per ogni $j \geq 3$, l'insieme compatto $K_j \setminus \overset{\circ}{K}_{j-2}$ è contenuto dentro l'aperto $W \setminus K_{j-2}$. La famiglia di tutte le palle aperte, abbastanza piccole da avere la loro chiusura contenuta simultaneamente in $W \setminus K_{j-2}$ e in qualche W_α forma un ricoprimento aperto di $K_j \setminus \overset{\circ}{K}_{j-1}$. Si estrae un sottoricoprimento finito, e si aggiunge alla nostra successione $\{\eta_i\}$ una funzione per ogni palla; la funzione deve essere uguale uno sulla palla e nulla fuori da un insieme chiuso contenuto simultaneamente in $W \setminus K_{j-2}$ e in uno dei W_α.

Per costruzione, per ogni j abbiamo solo un numero finito di η_i che non si annullano su K_j. Quindi, poiché ogni punto di W appartiene all'interno di un qualche K_j la somma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$$

è finita in un intorno di ogni punto di W. Inoltre, almeno un termine è diverso da zero in ogni punto di W. Allora

$$\frac{\eta_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j}$$

è una funzione ben definita e differenziabile. Se indichiamo con θ_i la restrizione di questa all'insieme X, abbiamo la tesi (Vedi [8] pag. 52). □

Milnor's exercise. Ora daremo una dimostrazione fondamentale per la ricostruzione della varietà a partire dall'algebra delle sezioni globali del suo fascio strutturale. Si tratta della la soluzione del noto "Milnor's exercise" (Vedi [12] problema 1C pagina 11).

Teorema 3.6. *Sia M una varietà paracompatta e $\phi : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ un morfismo di $\mathbb{R}$-algebre. Allora esiste un punto $x_0 \in |M|$ tale che $\phi(f) = f(x_0)$, per ogni f in $C^{\infty}(M)$.*

Dimostrazione. Sia

$$K_0 \subset U_0 \subset K_1 \subset U_1 \subset \cdots \subset K_i \subset U_i \subset K_{i+1} \ldots$$

con K_i compatti e U_i aperti tali che $M = \bigcup K_i$.

Sia $h_i : |M| \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$h_{i|_{K_i}} = 0 \text{ e } h_{i|_{M-U_i}} = 1.$$

L'esistenza di tali h_i è garantita dal teorema 3.5.

Allora $h = \sum_i h_i$ soddisfa:

$$\emptyset \neq h^{-1}(s) \subset K_i,\ \forall s \in \mathbb{R},\ s \geq 0$$

per i sufficientemente grande. Sia $l = h - \phi(h)$, allora $l \in \ker(\phi)$ e $l^{-1}(0)$ è un compatto. É facile vedere che:

$$f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f^2 + g^2)^{-1}(0), \forall\, f, g \in \ker(\phi)$$

e che $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Infatti se $f(x) \neq 0$ per tutti gli $x \in |M|$, f sarà invertibile e ciò contraddirebbe il fatto che $\phi(f) = 0$. Così, la famiglia

$$l^{-1}(0) \cap f^{-1}(0),\ f \in \ker(\phi),$$

è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita, tutti contenuti nel compatto $l^{-1}(0)$. Ne segue che esiste $x_0 \in f^{-1}(0)$, $\forall f \in \ker(\phi)$.

Se $g \in C^\infty(M)$, allora $x_0 \in (g - \phi(g))^{-1}(0)$, ovvero $g(x_0) = \phi(g)$ (come in [4] pag. 238). □

Proposizione 3.7. *Ogni $x_0 \in |M|$ definisce il morfismo di algebre $ev_{x_0} : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dato dalla valutazione di ogni funzione in x_0, e $\ker ev_{x_0} = \mathcal{J}_{x_0}$ è un ideale massimale in $C^\infty(M)$, con*

$$\mathcal{J}_{x_0} = \{f \in C^\infty(M) \,|\, f(x_0) = 0\}\,.$$

Dimostrazione. Sia J un ideale tale che $\mathcal{J}_{x_0} \subseteq J$. Sia poi $g \in J$ tale che $g(x_0) \neq 0$, allora posso definire una funzione $f(x) = g(x) - g(x_0)$, quindi $f(x_0) = 0$. Allora $f \in \mathcal{J}_{x_0} \Longrightarrow f \in J$, quindi $h = f - g$ appartiene a J con $f - g = -g(x_0)$ una costante non nulla. Quindi h è invertibile, allora $J = C^\infty(M)$ e dunque l'ideale $\mathcal{J}_{x_0}$ è massimale. □

Definizione 3.8. Sia A un'algebra commutativa reale. Allora lo *spettro reale* di A è definito come l'insieme degli ideali massimali di A.

$$MaxSpec_{\mathbb{R}}(A) := \{\mathcal{M} \subset A \text{ ideale massimale in } A\}\,.$$

Con la prossima proposizione, vedremo che abbiamo una corrispondenza biunivoca tra i punti della varietà M e lo spettro massimale dell'algebra delle funzioni liscie su $|M|$:

$$\begin{array}{ccc} MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) & \longleftrightarrow & |M| \\ \ker(ev_x) & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Proposizione 3.9. *Gli ideali massimali di $C^\infty(M)$ sono tutti e soli gli ideali della forma $\mathcal{J}_x$ per un qualche $x \in |M|$.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che ogni $\mathcal{J}_x$ è un ideale massimale in $C^\infty(M)$. Invece, sia I un ideale massimale in $C^\infty(M)$. Consideriamo $\phi : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ un morfismo di algebre. Allora $g(I) = (0)$. Quindi per il "Milnor's exercise" esiste x fissato tale che $\phi(f) = f(x)$. Quindi

$$I = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\} = \mathcal{J}_x.$$

□

Osserviamo che quanto appena dimostrato corrisponde al *"Nullstellensatz"* di Hilbert che è valido per anelli di polinomi su campi algebricamente chiusi, mentre qui lo dimostriamo per l'algebra delle sezioni globali di un fascio, quindi in $\mathbb{R}$.

D'ora in poi, grazie alla proposizione precedente, possiamo identificare lo spettro reale $MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ con $Hom(C^\infty(M), \mathbb{R})$, allora in tutta questa sezione identificheremo il punto x con l'ideale massimale $\mathcal{J}_x$ e con il morfismo ev_x.

Ora vogliamo dare a $MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ una struttura di spazio topologico.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni n-upla di elementi $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ e per ogni numero reale ε, definiamo il sottoinsieme di $MaxSpex_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$:

$$B_\varepsilon(ev_{\bar{x}}; f_1, \ldots, f_n) := \{ev_x \in MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) \mid |f_i(x) - f_i(\bar{x})| < \varepsilon, \forall i\}$$

Possiamo definire una topologia su $MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ considerando questi sottoinsiemi come una base per la topologia.

Proposizione 3.10. *La mappa*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & |M| & \longrightarrow & MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) \\ & x & \longrightarrow & ev_x \end{array}$$

è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Il fatto che la mappa sia biunivoca segue dalla proposizione precedente. Per mostrare che è un omeomorfismo, dobbiamo dimostrare che la mappa è aperta e continua. Sia $U = B_\varepsilon(ev_{\bar{x}}; f_1, \dots, f_n)$ un aperto di $MaxSpec_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$, dal momento che ogni f_i è una sezione differenziabile abbiamo subito che $\psi^{-1}(U)$ è aperto.

Sia ora V un aperto di $|M|$ vogliamo mostrare che $\psi(V)$ è aperto. Sia $ev_x \in \psi(V)$, ovvero $x \in V$. Scegliamo un aperto U di $|M|$ tale che $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$. Sia $f \in C^\infty(M)$ una sezione tale che $f_{|U} = 1$ e $f_{|\overline{V}^c} = 0$ (si può costruire grazie a 3.3). Allora è chiaro che $B_{\frac{1}{2}}(ev_x, f) \subseteq \psi(V)$, quindi ogni punto ev_x in $\psi(V)$ ha un intorno aperto, dunque $\psi(V)$ è aperto. □

3.3 Localizzazione

Ora introdurremo la tecnica della localizzazione che gioca un ruolo molto importante nell'ambito dell'algebra commutativa (per maggiori dettagli si fa riferimento a [2] capitolo 3).

La procedura con cui si costruisce il campo dei razionali $\mathbb{Q}$ a partire dall'anello degli interi $\mathbb{Z}$ si estende in maniera semplice ad un qualsiasi dominio di integrità A e produce il *campo delle frazioni* di A. Ricordiamo che se A è un dominio di integrità, per costruire l'anello delle frazioni dobbiamo considerare tutte le coppie ordinate (s, a) con $s, a \in A$ e $s \neq 0$ modulo la relazione di equivalenza:

$$(s, a) \cong (t, b) \Longleftrightarrow at - bs = 0.$$

Questa relazione è di equivalenza solo se A è un dominio di integrità, poiché la verifica della proprietà transitiva coinvolge la legge di cancellazione e quindi il fatto che A non abbia divisori dello 0. É comunque possibile generalizzare la relazione come segue.

Sia A un anello. Un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A è un sottoinsieme S di A tale che $1 \in S$ e S sia chiuso per moltiplicazione: in altre parole S è un sottosemigruppo del semigruppo moltiplicativo di A. Si definisce la relazione $\cong$ su $S \times A$ come segue:

$$(s, a) \cong (t, b) \iff (at - bs)u = 0 \text{ per qualche } u \in S.$$

Questa relazione è chiaramente riflessiva e simmetrica. Per mostrare che è transitiva supponiamo $(s, a) \cong (t, b)$ e $(t, b) \cong (u, c)$. Allora esistono v, w in S tali che $(at-bs)v = 0$ e $(bu-ct)w = 0$. Si elimini b da queste due equazioni e rimane $(au-ct)tvw = 0$. Poichè S è chiuso per moltiplicazione abbiamo che $tvw \in S$ e quindi $(s, a) \cong (u, c)$. Perciò abbiamo una relazione di equivalenza. Sia a/s il rappresentante della classe (s,a) e si denoti $S^{-1}A$ l'insieme delle classi di equivalenza. Definiamo una struttura di anello su $S^{-1}A$ definendo addizione e sottrazione di queste "frazioni" a/s come nell'algebra elementare, cioè:

$$\begin{aligned} (a/s) + (b/t) &= (at + bs)/st \\ (a/s)(b/t) &= ab/st \end{aligned}$$

Resta definito in modo naturale un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow S^{-1}A : f(x) = x/1$. Questo non è in generale iniettivo.

Esempio 3.11. Sia $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}_6 : f(x) = x/1$ e $S = \{[1]_6, [2]_6, [4]_6\}$ allora abbiamo che $[1]_6 \neq [4]_6$ ma, $(4 - 1)2 = 0$ quindi $f(1) = f(4)$.

Osservazione 3.12. *Se A è un dominio di integrità e $S = A - \{0\}$, allora $S^{-1}A$ è il campo delle frazioni di A.*

L'anello $S^{-1}A$ è detto *l'anello delle frazioni di A rispetto a S*. Esso ha la seguente *proprietà universale.*

Proposizione 3.13. *Sia $g : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli tale che $g(s)$ è invertibile in B per ogni $s \in S$. Allora esiste un unico omomorfismo di anelli $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ tale che $g = h \circ f$.*

Dimostrazione. Unicità. Se h soddisfa le condizioni allora $h(a/1) = hf(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$; allora, se $s \in S$,

$$h(1/s) = h((s/1)^{-1}) = h(s/1)^{-1} = g(s)^{-1}$$

e quindi $h(a/s) = h(a/1)h(1/s) = g(a)g(s)^{-1}$. Pertanto h è univocamente determinata da g.

Esistenza. Sia $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$. Mostriamo che h, omomorfismo di anelli, è ben definito. Supponiamo che $a/s = a'/s'$; allora esiste $t \in S$ tale che $(as' - a's)t = 0$, allora

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = 0$$

ora $g(t)$ è una unità in B, quindi $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$. $\square$

L'anello $S^{-1}A$ e l'omomorfismo $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ hanno le seguenti proprietà:

1. $s \in S \Longrightarrow f(s)$ è una unità in $S^{-1}A$;
2. $f(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$ per un qualche $s \in S$;
3. ogni elemento di $S^{-1}A$ è della forma $f(a)f(s)^{-1}$ per un qualche $a \in A$ e $s \in S$.

Viceversa, queste tre condizioni determinano l'anello $S^{-1}A$ a meno di isomorfismi. Precisamente:

Proposizione 3.14. *Sia $g : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli tale che*

1. *$s \in S \Longrightarrow g(s)$ è una unità in B;*
2. *$g(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$ per un qualche $s \in S$;*
3. *ogni elemento di B è della forma $g(a)g(s)^{-1}$.*

Allora c'è un'unico isomorfismo $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ tale che $g = h \circ f$.

Dimostrazione. Per quanto visto prima ci basta mostrare che

$$h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$$

è un isomorfismo (abbiamo usato 1 per definire h). Per l'ipotesi 3 sappiamo che h è suriettiva. Per mostrare che è iniettiva osserviamo il kernel di h: se $h(a/s) = 0$ allora $g(a) = 0$, quindi per 2 sappiamo che $at = 0$ per qualche $t \in S$, allora $(s, a) \cong (1, 0)$, ovvero $a/s = 0$ in $S^{-1}A$. $\square$

3.4 Ricostruzione del fascio

Adesso vogliamo vedere come sia possibile ricostruire l'intero fascio C^∞_M, partendo dall'algebra delle sezioni globali $C^\infty(M)$ e applicando la tecnica della localizzazione.

Consideriamo un insieme aperto $U \subset |M|$, e definiamo il sottoinsieme delle sezioni di $C^\infty(M)$ che sono invertibili in U. Più precisamente definiamo

$$\mathcal{S}_U := \left\{ f \in C^\infty(M) \,|\, f_{|U} \neq 0 \,\forall x \in U \right\}.$$

Si noti che $\mathcal{S}_U$ è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di $C^\infty(M)$. Definiamo ora l'insieme

$$\mathcal{S}_U^{-1} C^\infty(M) := (\mathcal{S}_U \times C^\infty(M)) / \sim$$

dove la relazione di equivalenza è data da: $(s, f) \sim (s', f')$ se e solo se esiste $s'' \in \mathcal{S}_U$ tale che

$$s''(s'f - sf') = 0.$$

Osserviamo che $\mathcal{S}_U^{-1} C^\infty(M)$ è la localizzazione di $C^\infty(M)$ rispetto a $\mathcal{S}_U$ e con le operazioni di addizione e moltiplicazione definite come segue

$$\begin{aligned} (s, f) + (s', f') &:= (ss', s'f + sf') \\ (s, f) \cdot (s', f') &:= (ss', ff') \end{aligned}$$

è un'algebra.

Il prossimo risultato è cruciale per la ricostruzione della struttura di fascio della varietà dall'algebra delle sue sezioni globali.

Proposizione 3.15. *La mappa*

$$\begin{array}{rccc} \ell : & \mathcal{S}_U C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty_M(U) \\ & (s, f) & \longmapsto & \dfrac{f_{|U}}{s_{|U}} \end{array}$$

è un isomorfismo di algebre.

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che ℓ è iniettiva. Supponiamo che $\frac{f_{|U}}{s_{|U}}$ sia zero. Allora $f_{|U} = 0$. Sia $s'' \in \mathcal{S}_U$ tale che $s''_{|\overline{U}^c} = 0$ allora $(s, f) \sim (1, 0)$ infatti $s''(1 \cdot f - s \cdot 0) = 0$. Ciò prova l'iniettività.

La suriettività è più complicata e rimandiamo al lemma 10.8 a pagina 149 di [14]. □

Teorema 3.16. *Sia $M = (|M|, C^\infty_M)$ una varietà. Allora l'algebra delle sezioni globali $C^\infty(M)$ determina il fascio C^∞_M:*

$$|M| \supset U \longmapsto \mathcal{S}_U^{-1} C^\infty(M) \cong C^\infty_M(U).$$

Capitolo 4

Geometria non commutativa

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato che le informazioni contenute nell'algebra delle funzioni differenziabili su una varietà, sono sufficienti a ricostruire per intero la varietà, quindi si riesce a ricostruire sia lo spazio topologico (i punti) che la struttura differenziale.

In geometria non commutativa, soprattutto sotto l'influenza della fisica quantistica, l'idea di sostituire gli insiemi di punti e le varietà con le algebre di funzioni corrispondenti è risultato l'approccio vincente.

L'articolo del 1943 [5], che contiene i risultati oggi noti come i teoremi di Gelfand-Naimark, è diventato una delle pietre miliari della geometria non commutativa in particolar modo relativamente ai suoi sviluppi degli ultimi decenni. Come vedremo Gelfand e Naimark hanno caratterizzato le algebre involutive di operatori, dette C^*-algebre, di cui l'algebra delle funzioni continue su di uno spazio topologico compatto è l'esempio più saliente.

4.1 C^*-algebre

Introduciamo ora una serie di notazioni e definizioni per definire le C^*-algebre.

Uno spazio vettoriale A su un campo F è detto un'*algebra lineare associativa* su F (o semplicemente un *algebra* se non vi è possibilità di confusione) se per ogni coppia x, y di elementi di A resta definito un prodotto xy in A, ovvero una mappa da $A \times A$ in A, tale che per ogni $x, y, z \in A$ e ogni $\lambda \in F$:

1. $x(yz) = (xy)z$;
2. $x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$
3. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

Le *algebre complesse* e *reali* sono algebre su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ rispettivamente. Un'algebra A è *commutativa* se $xy = yx$ per ogni $x, y \in A$. Se esiste un elemento e in un'algebra A tale che $ex = x = xe$ per ogni $x \in A$, allora A si dice un'*algebra con identità o con unità.*

Un sottospazio vettoriale I di un'algebra A è un *ideale sinistro* se $x \in I$, $z \in A$ implicano $zx \in I$, viceversa è un *ideale destro* se $x \in I$, $z \in A$ implicano $xz \in I$. Un *ideale bilatero* è un ideale sinistro che è anche destro. Un ideale I di A tale che $I \neq A$ è detto un *ideale proprio.* Un'algebra che non possiede alcun ideale proprio eccetto $\{0\}$ si dice *semplice.* Ovviamente per un'algebra commutativa le definizioni di ideale destro, sinistro, bilatero sono del tutto equivalenti. In questo caso si parlerà semplicemente di "ideale".

Una *-*algebra* è un'algebra A su $\mathbb{C}$ con una mappa $x \longmapsto x^*$ di A in se stesso tale che per ogni $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) $(x + y)^* = x^* + y^*$;

(b) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$;

(c) $(xy)^* = y^* x^*$;

(d) $x^{**} = x$.

La mappa $x \longmapsto x^*$ è detta una *involuzione*; per (d) è biunivoca. Uno *-*omomorfismo* di una *-algebra A in una *-algebra B è una mappa lineare $\phi : A \longrightarrow B$ tale che $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ e $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ per ogni $x, y \in A$. Se ϕ è biunivoca, ϕ è uno *-*isomorfismo* di A in B, e A e B sono detti $*$-*isomorfi.*

Un elemento x di una *-algebra A è detto:

- *normale* se $xx^* = x^*x$;

- *hermitiano o autoaggiunto* se $x^* = x$.

Un'algebra A che sia anche uno spazio normato che soddisfi

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ (x, y \in A)$$

è detta una *algebra normata.* Un'algebra normata che sia anche una *-algebra è detta una **-algebra normata.* Se l'algebra è completa rispetto alla norma è detta una **-algebra di Banach.*

L'involuzione in una *-algebra normata è *continua* se esiste una costante $M > 0$ tale che $\|x^*\| \leq M\|x\|$ per ogni x; l'involuzione è *isometrica* se $\|x^*\| = \|x\|$ per ogni x. Una sottoalgebra B di A è detta una *-sottoalgebra se $x \in B$ implica che $x^* \in B$. Due *-algebre normate A e B sono *isometricamente* **-isomorfe*, si scrive $A \simeq B$, se esiste uno *-isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ tale che $\|f(x)\| = \|x\|$ per orgni $x \in A$.

Una norma su una *-algebra soddisfa la *condizione* C^* se

$$\|x^*x\| = \|x^*\|\|x\| \qquad (x \in A). \tag{4.1}$$

Diamo ora la definizione più importante di questa sezione e capitolo.

Definizione 4.1. Una C^**-algebra* è un *-algebra di Banach la cui norma soddisfi la condizione C^*.

La norma in una C^*-algebra con una involuzione isometrica soddisfa la condizione

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \qquad (x \in A). \tag{4.2}$$

.

Osservazione 4.2. *Si può provare che in una* **-algebra di Banach 4.1 implica 4.2, senza assumere che l'involuzione sia isometrica; poiché è fortemente non banale, per la dimostrazione rimandiamo a [3] capitolo 3. É facile mostrare che la condizione 4.2 implica che l'involuzione è isometrica, quindi 4.2 implica 4.1. Infine le condizioni 4.1 e 4.2 si rivelano equivalenti.*

Esempio 4.3. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Ad X associamo naturalmente un'algebra commutativa $C(X)$ che consiste di tutte le funzioni continue $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Questa è un'algebra di Banach rispetto alla norma dell'estremo superiore:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Inoltre $C(X)$ dotata di un'involuzione isometrica $f \longrightarrow f^* : f^*(x) = \overline{f(x)}$; e la norma soddisfa la C^*-condizione

$$\|f\|^2 = \|f^* f\|.$$

$C(X)$ risulta una C^*-algebra con unità.

Possiamo ora enunciare il primo teorema di Gelfand-Naimark.

Teorema 4.4 (Gelfand-Naimark I). *Sia A un'algebra commutativa di Banach, con un'involuzione che soddisfa la proprietà $\|x^*x\| = \|x^*\|\|x\|$ per ogni x in A. Allora A è isometricamente *-isomorfo a $C_0(Y)$, ovvero all'algebra delle funzioni continue a valori complessi che si annullano all'infinito su un insieme Y di Hausdorff localmente compatto.*

Possiamo semplificare e riassumere le conseguenze di questo teorema nel seguente modo. Per un'algebra, essere una C^*-algebra commutativa è condizione *necessaria* per essere isometricamente isomorfa a $C(X)$ con X compatto o $C_0(Y)$ con Y paracompatto; il teorema di Gelfand-Naimark ci garantisce che questa proprietà apparentemente squisitamente algebrica sia anche condizione *sufficiente* affinché l'algebra data sia isomorfa all'algebra delle funzioni continue di uno spazio compatto.

Se facciamo cadere l'ipotesi di commutatività possiamo studiare le C^*-algebre non commutative come un algebra di funzioni su uno spazio "virtuale" o su uno "spazio topologico non commutativo".

Il teorema di Gelfand-Naimark assicura che la categoria degli spazi compatti con le funzioni continue, e delle C^*-algebre commutative e con unità con i morfismi unitari siano categorie equivalenti.

Dunque la geometria non commutativa ci permette di trattare spazi le cui algebre di funzioni siano non commutative passando indifferentemente dalla topologia all'algebra, cambiando semplicemente il nostro dizionario (per una trattazione completa si fa riferimento a [6] pagg. 9-15).

TOPOLOGIA	ALGEBRA
spazi compatti	algebre con unità
mappa continua	morfismo
omeomorfismo	automorfismo
compatto	con unità
sottoinsieme aperto	ideale
sottoinsieme chiuso	algebra quoziente

4.2 Spazi di Hilbert

Per comprendere l'importanza del secondo teorema di Gelfand Naimark dobbiamo introdurre alcune definizioni relative agli *Spazi di Hilbert*. Saranno ripresi anche alcuni concetti già presenti nel primo capitolo. Per una trattazione completa si fa riferimento a [13] sezione 2.3 pagg. 37-44 e 3.3 pagg. 112-122.

Definizione 4.5. Siano X e Y spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. $T : X \longrightarrow Y$ è detto *operatore lineare da X in Y* se per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $f, g \in X$ è lineare

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

Sia $\mathfrak{L}(X, Y)$ l'insieme degli operatori lineari da X in Y.

Quando X e Y sono normati, $\mathfrak{B}(X, Y) \subset \mathfrak{L}(X, Y)$ denota il sottoinsieme degli operatori lineari continui. Useremo la seguente notazione $\mathfrak{L}(X) := \mathfrak{L}(X, X)$ e $\mathfrak{B}(X) := \mathfrak{B}(X, X)$.

Definizione 4.6. Siano X e Y spazi normati sul medesimo campo. $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ è detto *limitato* se vale una delle seguenti condizioni, che risultano equivalenti,

(i) esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\|Tu\|_Y \leq M\|u\|_X$ per ogni $u \in X$;

(ii) $\sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} < +\infty$.

In tal caso il numero

$$\|T\| := \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$$

è detto *norma* di T.

Il prossimo teorema, di cui non daremo la dimostrazione che è comunque relativamente banale, ci permetterà di stabilire il legame tra operatori continui e operatori limitati.

Teorema 4.7. *Sia $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ con X, Y spazi normati sul medesimo campo. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) T è continuo in 0;

(ii) T è continuo;

(iii) T è limitato.

Il nome "norma" per $\|T\|$ non è casuale; in effetti la norma di operatori rende a tutti gli effetti $\mathfrak{B}(X,Y)$, e in particolare $\mathfrak{B}(X)$ uno spazio normato come proveremo tra poco. Più precisamente, vedremo che $\mathfrak{B}(X,Y)$ è di Banach se Y lo è. Il teorema che segue riguarda anche un altro importante fatto in relazione alla struttura algebrica. Cominciamo con l'osservare che poiché la composizione di operatori in $\mathfrak{L}(X)$ (rispettivamente in $\mathfrak{B}(X)$), produce operatori nello stesso spazio, $\mathfrak{L}(X)$ (risp. $\mathfrak{B}(X)$) sono un'algebra rispetto alla composizione. Dunque sia $\mathfrak{L}(X)$ che $\mathfrak{B}(X)$ possiedono una struttura naturale di *algebra con unità.*

Nel teorema che segue $\mathfrak{B}(X)$ è inoltre un'*algebra normata con unità* rispetto alla norma degli operatori. Se X è uno spazio di Banach, $\mathcal{B}(x)$ è un'algebra di Banach.

Teorema 4.8. *Sia X, Y spazi normati sullo stesso campo.*

(a) *L'applicazione* $\|\cdot\| : T \longrightarrow \|T\|$, *dove* $\|T\|$ *è definita da 4.6 per* $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ *è una norma su* $\mathfrak{B}(X,Y)$ *e rende* $\mathfrak{B}(X,Y)$ *spazio normato.*

(b) *Sull'algebra con unità* $\mathfrak{B}(X)$ *valgono le ulteriori relazioni che la rendono un'algebra normata con unità:*

   (i) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ *e* $T, S \in \mathfrak{B}(X)$*;*

   (ii) $\|I\| = 1$.

(c) *Se* Y *è completo,* $\mathfrak{B}(X,Y)$ *è uno spazio di Banach. In particolare, se* X *uno spazio di Banach allora* $\mathfrak{B}(X)$ *è un'algebra di Banach con unità.*

Diamo ora una definizione di *prodotto scalare (hermitiano).*

Definizione 4.9. Se X è uno spazio vettoriale sul campo complesso, un'applicazione $S : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *prodotto scalare hermitiano* e (X,S) *spazio con prodotto scalare* quando S soddisfa

H0 $S(u,u) \geq 0$ per ogni u in X;

H1 $S(u, \alpha v + \beta w) = \alpha S(u,v) + \beta S(u,w)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $u, v, w \in X$;

H2 $S(u,v) = \overline{S(v,u)}$ per ogni $u, v \in X$;

H3 $S(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0$ per ogni $u \in X$.

Proposizione 4.10. *Il prodotto scalare induce naturalmente una norma su* X*.*

Dimostrazione. É sufficiente considerare la funzione

$$\|\cdot\| = \sqrt{S(\cdot,\cdot)}$$

dove la radice quadrata è aritmetica, osserviamo che l'ipotesi **H2** implica che $S(\cdot,\cdot)$ è reale. □

Definiamo ora cos'è uno *spazio di Hilbert.*

Definizione 4.11. Uno spazio vettoriale sul campo complesso con prodotto scalare hermitiano si dice *spazio di Hilbert* se è spazio di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Un isomorfismo di spazi di Hilbert è detto equivalentemente

- *isomorfismo di spazi di Hilbert*;
- *trasformazione unitaria*;
- *operatore unitario.*

D'ora in poi indicheremo con $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert H con il relativo prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Definizione 4.12. Siano $(H_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1)$ e $(H_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ due spazi di Hilbert e $T \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$.

L'unico operatore lineare $T^* \in \mathfrak{L}(H_2, H_1)$ che soddisfa

$$(u|Tv)_2 = (T^*u|v)_1, \text{ per ogni coppia } u \in H_2,\ v \in H_1$$

si chiama operatore *aggiunto (hermitiano)*, o anche *coniugato hermitiano*, dell'operatore T.

L'operazione di coniugazione hermitiana gode delle seguenti proprietà.

Teorema 4.13. *Siano $(H_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1)$ e $(H_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ due spazi di Hilbert e $T \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$. Valgono i seguenti fatti:*

(a) $T^* \in \mathfrak{B}(H_2, H_1)$ e più precisamente:

$$\|T^*\| = \|T\|,$$

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\|$$

(b) l'operazione di coniugazione hermitiana è involutiva*:*

$$(T^*)^* = T$$

(c) *Se* $S \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *valgono le identità:*

$$(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*;$$

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

(d) T *è biettivo se e solo se* T^* *è biettivo. In tal caso vale:* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Teorema 4.14. *Se* H *è uno spazio di Hilbert,* $\mathfrak{B}(H)$ *è una* C^**-algebra con unità se l'involuzione è definita come la coniugazione hermitiana.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [13] pagg. 116-117. □

Definizione 4.15. Siano $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.

(a) $T \in \mathfrak{B}(H)$ è detto *normale* se $TT^* = T^*T$;

(b) $T \in \mathfrak{B}(H)$ è detto *autoaggiunto* se $T = T^*$.

Siamo ora pronti per enunciare il secondo teorema di Gelfand Naimark.

Teorema 4.16 (Gelfand-Naimark II)**.** *Sia* A *un'algebra di Banach, con un involuzione che soddisfa la proprietà* $\|x^*x\| = \|x^*\|\|x\|$ *per ogni* x *in* A*. Allora* A *è isometricamente* **-isomorfo a una* **-sottoalgebra di operatori lineari limitati chiusa rispetto alla norma di un qualche spazio di Hilbert.*

Il secondo teorema di Gelfand-Naimark è molto importante perché conferisce alle C^*-algebre un certo grado di concretezza. Infatti, nella meccanica quantistica, si definisce osservabile una qualunque grandezza fisica che possa essere misurata.

Una differenza cruciale tra le quantità classiche e gli osservabili della meccanica quantistica è che gli ultimi possono non essere simultaneamente misurabili, o la misura di un osservabile può modificare drasticamente la struttura del sistema e quindi una seconda sarebbe completamente scollegata dal sistema di partenza, e quindi invertendo le misure si otterrebe un risultato diverso. Questo si esprime matematicamente con due operatori corrispondenti non commutativi, ovvero

$$AB - BA \neq 0$$

questa disuguaglianza spiega l'importanza della geometria non commuttativa e dello studio dell C^*-algebre non commutative.

Più precisamente, poiché nella meccanica quantistica si perde la nozione di misura intesa classicamente, il valore dell'osservabile viene espresso in termini probabilistici. Dunque un'osservabile diventa matematicamente un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert, ma in generale non vale il viceversa, cioè non tutti gli operatori autoaggiunti hanno un significato fisico e si possono interpretare come osservabili. Resta comunque un legame molto forte tra le C^*-algebre e il mondo della fisica quantistica. Il II teorema di Gelfand-Naimark ci permette di realizzare l'algebra degli osservabili concretamente.

Vogliamo ora brevemente enunciare il teorema di Gelfand-Naimark per C^*-algebre reali. Una *C^*-algebra reale* è una *-algebra di Banach A con identità 1 sul campo dei reali tale che per ogni $x \in A$:

i) $\|x^*x\| = \|x\|^2$;

ii) $1 + x^*x$ è invertibile.

Se A una arbitraria (anche non commutativa) C^*-algebra reale, allora Ingelstam in [10] ha dimostrato il seguente teorema che corrisponde al teorema di Gelfand-Naimark in questo caso particolare.

Teorema 4.17. *Sia A una C^*-algebra con identità. Allora A è isometricamente *-isomorfa come C^*-algebra reale ad una *-sottoalgebra di operatori lineari limitati chiusa rispetto alla norma di un qualche spazio di Hilbert.*

Bibliografia

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] Robert S. Doran and Victor A. Belfi. *Characterizations of C^*-algebras*, volume 101 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1986. The Gelfand-Naĭmark theorems.

[4] Eduardo J. Dubuc. Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 20(3):231–279, 1979.

[5] I. Gelfand and M. Neumark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 12(54):197–213, 1943.

[6] José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly, and Héctor Figueroa. *Elements of noncommutative geometry*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[7] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[8] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[9] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[10] Lars Ingelstam. Real Banach algebras. *Ark. Mat.*, 5:239–270 (1964), 1964.

[11] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[12] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[13] Valter Moretti. *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica*, volume 47 of *UNITEXT.* Springer-Verlag, Milano, 2010. Operatori in spazi di Hilbert.

[14] Jet Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2003. Joint work of A. M. Astashov, A. B. Bocharov, S. V. Duzhin, A. B. Sossinsky, A. M. Vinogradov and M. M. Vinogradov, Translated from the 2000 Russian edition by Sossinsky, I. S. Krasilschik and Duzhin.

[15] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.